

RĪGAS VALSTS TEHNIKUMS

Metodiskā izstrādne

TAISNES VIENĀDOJUMS UN TĀ VEIDI

Pašvadītas mācīšanas attīstoši materiāli

Autore:
Elita Kazakēviča

RĪGA 2023

SATURA RĀDĪTĀJS

Anotācija.....	3
1. Teorētiskā daļa.....	4
1.1. Teorētiskais pamatojums	4
1.2. Pamatatziņas par taisni	4
1.3. Optimālā līmeņa formulu lapa.....	4
1.4. Taisnes vienādojumu veidi	5
1.5. Perpendikulāru taisņu vienādojumu sakarība	5
1.6. Paralēlu taisņu vienādojumu sakarība	5
2. Praktiskā daļa.....	6
2.1. Praktiskās daļas pamatojums	6
2.2. Uzdevumi par taisni ar risinājumu paraugiem.....	6
2.3. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai ar atbildēm	10
Secinājumi un priekšlikumi	11
Izmantotie avoti	12

ANOTĀCIJA

Metodiskā materiāla autore: Elita Kazakēviča

Izstrādes gads: 2023

Darba nosaukums: Taisnes vienādojums un tā veidi

Darba veids: Pašvadītas mācīšanas attīstoši materiāli

Pilsēta: Rīga

Darbs satur 12 lpp., 4 tabulas, 3 informatīvos avotus.

Metodiskā materiāla mērķis ir attīstīt izglītojamo patstāvīgas mācīšanās prasmes, loģisko domāšanu, prasmi jēgpilni pielietot formulu lapu. Metodiskā materiāla uzdevums ir sniegt pamatzināšanas par taisnes vienādojumu plaknē, tās veidiem, sakarības starp paralēlu un perpendikulāru taisņu virziena koeficientiem un to lietošanu, kas ir nepieciešamas analītiskās ģeometrijas sekmīgai apgūšanai.

Darbs sākas ar īsu teorētisku izklāstu, tajā definēti pamatjēdzieni un pamatformulas, seko uzdevumu risinājumu paraugi ar detalizētiem paskaidrojumiem un uzdevumi pašpārbaudei ar atbildēm.

Materiāls ir izstrādāts par tēmu, kura iepriekš vidusskolas kursā nav aplūkota, tikai augstskolu tehnisko specialitāšu augstākās matemātikas vai analītiskās ģeometrijas kursā. Tieši šī iemesla dēļ, materiāls ir aktuāls.

Mērķauditorija ir 1.kursa izglītojamie, kuri apgūst matemātiku optimālajā līmenī. Darbs būs noderīgs arī 3. kursa izglītojamajiem, kuri gatavojas valsts pārbaudes darbam matemātikā.

1. TEORĒTISKĀ DAĻA

1.1. Teorētiskais pamatojums

Teorētiskajā daļā ir īss teorētisks izklāsts. Tajā definēti pamatjēdzieni un dotas pamatformulas, dažos gadījumos ar īsu piemēru:


- taisnes vienādojums caur diviem ir dotajiem punktiem;
- taisnes vienādojums ar virziena koeficientu;
- perpendikulāru taisņu vienādojumu sakarība;
- paralēlu taisņu vienādojumu sakarība.

1.2. Pamatziņas par taisni

Viens no ģeometrijas pamatelementiem ir taisne. Kā zināms taisne ir bezgalīga un tā sastāv no bezgalīgi daudz punktiem un caur jebkuriem diviem punktiem var novilkt tikai vienu taisni. Taisnes vienādojums $y = kx + b$ ir zināms jau no pamatskolas. Taisnes virziena noteikšanai koordinātu plaknē lieto jēdzienus “taisnes virziena koeficients”.

1.3. Optimālā līmeņa formulu lapa

Formulas par taisni, tās vienādojumiem un virziena koeficienta īpašībām atrodamas optimālā līmeņa formulu lapā (skat. 1. att.). [3]

Analītiskā ģeometrija	
Vektori plaknē Ja $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, tad $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ Ja $\vec{a} = (a_x; a_y)$, $\vec{b} = (b_x; b_y)$, tad $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y)$ $k\vec{a} = (ka_x; ka_y)$ $ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$	Vektori telpā Ja $A(x_1; y_1; z_1)$ un $B(x_2; y_2; z_2)$, tad $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ Ja $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ un $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, tad $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$ $k\vec{a} = (ka_x; ka_y; ka_z)$ $ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Attālums starp punktiem, nogriežņa viduspunksts Ja $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, tad $ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $[AB]$ viduspunksts ir $C(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$	Taisnes vienādojums $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$ $y = kx + b$ $P_1(x_1; y_1)$ un $P_2(x_2; y_2)$ – punkti, caur kuriem iet taisne. Taisnes virziena koeficients $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Riņķa līnijas vienādojums Ja centrs $O(x_0; y_0)$ un rādiuss R , tad $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	Taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir: paralēlas, ja $k_1 = k_2$ perpendikulāras, ja $k_1 \cdot k_2 = -1$
Riņķis un riņķa līnija R – rādiuss, α – centra leņķis, C – riņķa līnijas garums, l_a – loka garums, S_a – sektora laukums $C = 2\pi R$ $S = \pi R^2$ $l_a = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ $S_a = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ AB – diametrs, E – punkts uz riņķa līnijas $\sphericalangle AEB = 90^\circ$	Ģeometrija plaknē Trijstūris Sinusu teorēma  Paralelograms a, b – malas, α – leņķis starp
Triju perpendikulu teorēma Taisne (t), kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra slīpnei (s), kura vilkta pret šo plakni, tad un tikai tad, ja tā ir perpendikulāra šīs slīpnes projekcijai (p).	Taisnes vienādojums $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$ $y = kx + b$ $P_1(x_1; y_1)$ un $P_2(x_2; y_2)$ – punkti, caur kuriem iet taisne. Taisnes virziena koeficients $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir: paralēlas, ja $k_1 = k_2$ perpendikulāras, ja $k_1 \cdot k_2 = -1$
Cilindrs R – rādiuss, H – augstums $S_{\text{savu}} = 2\pi RH$ $V = \pi R^2 H$ Lode R – rādiuss $S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	Ja visi piramīdas divplakņu karkta leņķi pie pamata ir vienādi, tad augstuma pamats ir piramīdas pamatā ievilkta riņķa centrs. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

1. att. Optimālā līmeņa formulu lapa – Taisnes vienādojums

1.4. Taisnes vienādojumu veidi

Taisnes vienādojums caur diviem dotajiem punktiem $P_1(x_1; y_1)$ un $P_2(x_2; y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Ja $x_2 - x_1 = 0$, tad taisne ir paralēla Oy asij un taisnes vienādojums ir $x = x_1$.

Ja $y_2 - y_1 = 0$, tad taisne ir paralēla Ox asij un taisnes vienādojums ir $y = y_1$.

Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Taisnes vienādojums vispārīgā veidā

$$Ax + By + C = 0$$

Ja koeficients $A = 0$, tad taisne ir paralēla x asij, ja $B = 0$, tad taisne ir paralēla y asij. Koeficienti A un B ģeometriskā nozīmē ir taisnei perpendikulāra vektora koordinātas

$$\vec{n} = (A; B)$$

1.5. Perpendikulāru taisņu vienādojumu sakarība

Taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir perpendikulāras, ja $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Piemēram, taisnes $y = 5x + 8$ ($k_1 = 5$) un $y = -\frac{1}{5}x + 9$ ($k_2 = -\frac{1}{5}$) ir perpendikulāras, jo $5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$.

1.6. Paralēlu taisņu vienādojumu sakarība

Taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir paralēlas, ja $k_1 = k_2$.

Piemēram, taisnes $y = 5x + 8$ ($k_1 = 5$) un $y = 5x + 9$ ($k_2 = 5$) ir paralēlas, jo virzienu koeficienti ir vienādi $k_1 = k_2 = 5$. [2]

2. PRAKTISKĀ DAĻA

2.1. Praktiskās daļas pamatojums

Temata “Taisnes vienādojums un tā veidi” efektīvai un koncentrētai apguvei izglītojamajiem ir piedāvāti pamatuzdevumi par taisni ar detalizētu skaidrojumu, kura mērķis ir ilustrēt uzdevumu risināšanas organizāciju, attīstīt prasmes uzdevumu risināšanā, pilnveidot patstāvīgā darba iemaņas.

Uzdevumu veidi ir izvēlēti atbilstoši matemātikas standartam [1]:

- taisnes vienādojums, ja dotas divu taisnes punktu koordinātas (skat. 1. tabulu);
- taisnes vienādojums, ja dotas viena taisnes punkta koordinātas un virziena koeficients (skat. 2. tabulu);
- sakarību starp paralēlu (skat. 3. tabulu) un perpendikulāru taisņu virziena koeficientiem (skat. 4. tabulu) pielietošana;
- pierādījuma uzdevums.

2.2. Uzdevumi par taisni ar risinājumu paraugiem

1. uzdevums

Uzraksti vienādojumu taisnei, kas iet caur punktiem $P_1(1; 3)$ un $P_2(0; -5)$. Nosaki šīs taisnes virziena koeficientu.

1.tabula

Taisnes vienādojums, ja dotas divu taisnes punktu koordinātas

1.	Taisnes vienādojums caur diviem dotajiem punktiem $P_1(x_1; y_1)$ un $P_2(x_2; y_2)$.	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
2.	Doto punktu P_1 un P_2 koordinātu ievietošana vienādojumā.	$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - 3}{-5 - 3}$
3.	Darbību veikšana saucējā.	$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 3}{-8}$
4.	Daļu pārveidošana pielietojot proporcijas pamatīpašību (ja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tad $a \cdot d = b \cdot c$).	$-8 \cdot (x - 1) = -1 \cdot (y - 3)$
5.	Iekavu atvēršana.	$-8x + 8 = -y + 3$
6.	Saskaitām pārvietošana uz kreiso pusi un līdzīgos locekļu savilkšana, pārveidojot taisnes vienādojumu vispārīgā veidā ($Ax + By + C = 0$).	$-8x + y + 5 = 0$ vai $8x - y - 5 = 0$
7.	Virziena koeficienta noteikšana, izsakot mainīgo y no pēdējā vienādojuma, izteikšana formā $y = kx + b$.	$y = 8x - 5$
8.	Virziena koeficienta k noteikšana.	$k = 8$

Atbilde. Taisnes vienādojums ir $8x - y - 5 = 0$, virziena koeficients $k = 8$.

2. uzdevums

Uzraksti vienādojumu taisnei caur punktu $P(1;2)$ un virziena koeficientu $k = 5$ formā $Ax + By + C = 0$.

2. tabula

Taisnes vienādojums, ja dotas viena taisnes punkta koordinātas un virziena koeficients

1.	Taisnes vienādojums ar virziena koeficientu caur doto punktu	$y - y_1 = k(x - x_1)$
2.	Virziena koeficienta vērtības un dotā punkta $P(1;2)$ koordinātu ievietošana vienādojumā.	$y - 2 = 5 \cdot (x - 1)$
3.	Iekavu atvēršana	$y - 2 = 5x + 5$
4.	Saskaitāmos pārvietošana uz kreiso pusi	$y - 2 - 5x - 5 = 0$
5.	Līdzīgo locekļu savilkšana, lai iegūtu taisnes vienādojumu vispārīgā veidā ($Ax + By + C = 0$)	$-5x + y - 7 = 0$ vai $5x - y + 7 = 0$

Atbilde. Taisnes vienādojums ir $5x - y + 7 = 0$.

3. uzdevums

Uzraksti vienādojumu taisnei, kas paralēla taisnei $2x + 3y + 6 = 0$ un iet caur punktu $P(3; 1)$. Taisnes vienādojumu uzraksti formā $Ax + By + C = 0$. Nosaki abu taisņu virziena koeficientus!

3. tabula

Sakarības starp paralēlu taisņu virziena koeficientiem

1.	Jānosaka dotās taisnes $2x + 3y + 6 = 0$ virziena koeficientu, izsakot y . Vispirms izsaka $3y$ un tad izdala ar 3.	$3y = -2x - 6$ $y = -\frac{2}{3}x - 2$
2.	Virziena koeficienta k_1 noteikšana.	$k_1 = -\frac{2}{3}$
3.	Dotajai taisnei paralēlās taisnes virziena koeficienta uzrakstīšana, ņemot vērā paralēlu taisņu sakarību: taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir paralēlas, ja $k_1 = k_2$.	$k_2 = -\frac{2}{3}$
4.	Paralēlās taisnes vienādojuma uzrakstīšana.	$y = -\frac{2}{3}x - b$
5.	b vērtības noteikšana, ievietojot pēdējā vienādojumā punkta $P(3; 1)$ koordinātas.	$1 = -\frac{2}{3} \cdot 3 - b$
6.	Iegūtā vienādojuma atrisināšana.	$1 = -2 - b$ $b = -3$
7.	Iegūtās b vērtības ievietošana vienādojumā $y = -\frac{2}{3}x - b$.	$y = -\frac{2}{3}x - (-3)$ jeb $y = -\frac{2}{3}x + 3$
8.	Vienādojuma uzrakstīšana formā $Ax + By + C = 0$.	$\frac{2}{3}x + y - 3 = 0$ jeb $2x + 3y - 9 = 0$

Atbilde. Taisņu virziena koeficienti $k_1 = k_2 = -\frac{2}{3}$. Vienādojums taisnei, kas paralēla taisnei $2x + 3y + 6 = 0$ un iet caur punktu $P(3; 1)$ ir $2x + 3y - 9 = 0$.

4. uzdevums

Uzraksti vienādojumu taisnei, kas perpendikulāra taisnei $2x + 2y + 1 = 0$ un iet caur punktu $P(-2; 1)$. Taisnes vienādojumu uzraksti formā $Ax + By + C = 0$. Nosaki abu taisņu virziena koeficientus!

4.tabula

Sakarības starp perpendikulāru taisņu virziena koeficientiem

1.	Dotās taisnes $2x + 2y + 1 = 0$ virziena koeficienta noteikšana, izsakot y . Vispirms izsaka $2y$, tad izdala vienādojumu ar 2.	$2y = -2x - 1$ $y = -\frac{2}{2}x - \frac{1}{2}$ $y = -x - \frac{1}{2}$
2.	Taisnes virziena koeficienta noteikšana	$k_1 = -1$
3.	Dotajai taisnei perpendikulāras taisnes virziena koeficienta noteikšana, ņemot vērā, ka taisnes $y = k_1x + b_1$ un $y = k_2x + b_2$ ir perpendikulāras, ja $k_1 \cdot k_2 = -1$.	$k_2 = 1$
4.	Perpendikulāras taisnes vienādojuma uzrakstīšana.	$y = x - b$
5.	b vērtības noteikšana, ievietojot pēdējā vienādojumā punkta $P(-2; 1)$ koordinātas.	$1 = 1 \cdot (-2) - b$
6.	Iegūtā vienādojuma atrisināšana.	$1 = -2 - b$ $b = -3$
7.	Iegūtās b vērtības ievietošana vienādojumā $y = x - b$.	$y = x - (-3)$ jeb $y = x + 3$
8.	Vienādojuma uzrakstīšana formā $Ax + By + C = 0$.	$x - y + 3 = 0$

Atbilde. Taisņu virziena koeficienti $k_1 = -1$ un $k_2 = 1$. Vienādojums taisnei, kas paralēla taisnei $2x + 2y + 1 = 0$ un iet caur punktu $P(-2; 1)$ ir $x - y + 3 = 0$.

5. uzdevums

Pierādi, ka $y = 2x - 8$ un $6x - 3y - 1 = 0$ ir paralēlas.

Pierādījums

Taisnes $y = 2x - 8$ virziena koeficients ir $k_1 = 2$.

Nosakām otrās taisnes virziena koeficientu:

$$3y = 6x - 1$$

$$y = 2x - \frac{1}{3}$$

$$k_2 = 2$$

Tā kā taisņu virziena koeficienti ir vienādi, tad taisnes ir paralēlas.

2.3. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai ar atbildēm

1. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu $y = kx + b$, kura iet caur koordinātu sākumpunktu un ir paralēla taisnei $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Atbilde. $y = -\frac{1}{2}x$.

2. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu veidā $y = kx + b$, kura ir paralēla taisnei $2x + 3y - 2 = 0$ un iet caur punktu $A(-3; 1)$.

Atbilde. $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

3. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu veidā $Ax + By + C = 0$, kura iet caur punktu $A(2; -2)$ un ir paralēla taisnei a) $3x - 4y = 0$ un b) $x - 2y + 4 = 0$.

Atbilde. a) $3x - 4y - 14 = 0$, b) $x - 2y - 6 = 0$

4. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu, kura iet caur koordinātu sākumpunktu un ir perpendikulāra taisnei $7x - 2y + 8 = 0$.

Atbilde. $y = -\frac{2}{7}x$.

5. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu veidā $Ax + By + C = 0$, kura iet caur punktu $A(2; -1)$ un ir perpendikulāra taisnēm a) $5x - 2y - 3 = 0$ un b) $2x - 3y - 6 = 0$.

Atbilde. a) $2x + 5y + 1 = 0$, b) $3x + 2y - 4 = 0$.

6. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu veidā $Ax + By + C = 0$, kura iet caur punktiem $A(-3; 2)$ un $B(5; 4)$.

Atbilde. $x - 4y + 11 = 0$.

7. uzdevums

Uzraksti taisnes vienādojumu veidā $Ax + By + C = 0$, kura iet caur punktiem $A(5; 2)$ un taisnes virziena koeficients $k = 2$.

Atbilde. $2x - y - 8 = 0$.

SECINĀJUMI UN PRIEKŠLIKUMI

Darbā izvirzītais mērķis ir sasniegts – izveidots daudzveidīgs, mācību programmai atbilstošs metodiskais materiāls izglītojamo patstāvīgas mācīšanās prasmi un loģiskās domāšanas attīstīšanai, kā arī jēgpilnai formulu lapas lietošanai.

Darbā izvirzītie uzdevumi ir izpildīti. Metodiskajā materiālā izveidots īss teorētisks tēmas izklāsts par taisnes vienādojumu plaknē un tās veidiem, sakarību starp paralēlu un perpendikulāru taisņu virziena koeficientiem lietošanu, kas ir nepieciešamas analītiskās ģeometrijas sekmīgai apgūšanai. Izveidoti 5 uzdevumi ar risinājumu paskaidrojumiem un 7 uzdevumi patstāvīgai risināšanai ar atbildēm. Šo darbu matemātikas skolotājs var piedāvāt izglītojamajiem optimālā līmeņa matemātikas kursā, apgūstot analītiskās ģeometrijas tēmu “Taisnes vienādojums” patstāvīgi vai arī nostiprinot zināšanas, kā arī gatavojoties eksāmenam.

Materiāls sekmīgi aprobēts grupās EA3, DP3-1, AV1, ATK1 un PRT1.

Priekšlikums būtu vairāk izveidot šādu materiālu, lai palīdzētu izglītojamajiem sekmīgāk apgūt optimālā līmeņa matemātikas kursu, kā arī gatavoties valsts pārbaudes darbam matemātikā.

IZMANTOTIE AVOTI

1. Ministru kabinets. *Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem.* (2020). Skatīts 2023. gada 8. martā // <https://likumi.lv/ta/id/309597-noteikumi-par-valsts-visparejas-videjas-izglitibas-standartu-un-visparejas-videjas-izglitibas-programmu-paraugiem>
2. Skola 2030. *Vidusskola. 2. Analītiskā ģeometrija I: Līnijas vienādojums.* (2021). Skatīts 2023. gada 8. martā // <https://mape.skola2030.lv/materials/mSBRwtoaaY55gGaZybrADH>
3. VISC. *Matemātikas centralizētā eksāmena formulu lapa.* (2022). Skatīts 2023. gada 8. martā // <https://www.visc.gov.lv/lv/media/577/download>